

Anton NEGRILĂ  
Maria NEGRILĂ

**matematică**  
**algebră**  
**geometrie**  
**clasa a VIII-a**  
**partea I**

ediția a XIV-a



**mate 2000 – consolidare**

## Cuprins

### RECAPITULARE ȘI EVALUARE INIȚIALĂ

Teste cu exerciții și probleme recapitulative pentru pregătirea testării inițiale .....5

### ALGEBRĂ

#### Capitolul I. INTERVALE DE NUMERE REALE. INECUAȚII ÎN $\mathbb{R}$

1. Mulțimi de numere. Forme de scriere a unui număr .....	13
<i>Test de autoevaluare</i> .....	19
2. Reprezentarea pe axă. Ordonarea numerelor reale. Valoarea absolută. Aproximarea numerelor reale.....	21
Recapitulare și sistematizare prin teste .....	26
<i>Test de autoevaluare</i> .....	27
3. Mulțimi definite printr-o proprietate comună a elementelor lor.....	29
4. Intervale în $\mathbb{R}$ . Definiție. Reprezentare pe axă .....	30
5. Operații cu intervale.....	35
<i>Test de autoevaluare</i> .....	41
Recapitulare și sistematizare prin teste .....	43
6. Inecuații de forma $ax + b \geq 0$ ( $\leq$ , $>$ , $<$ ), unde $a, b \in \mathbb{R}$ .....	44
<i>Test de autoevaluare</i> .....	47
Recapitulare și sistematizare prin teste .....	49

#### Capitolul II. CALCUL ALGEBRIC ÎN $\mathbb{R}$

<b>A. Operații cu numere reale reprezentate prin litere.....</b>	<b>50</b>
1. Adunarea și scăderea numerelor reale reprezentate prin litere.....	51
2. Înmulțirea și împărțirea numerelor reale reprezentate prin litere .....	54
3. Ridicarea la putere cu exponent număr natural a numerelor reale reprezentate prin litere.....	58
4. Ordinea efectuării operațiilor cu expresii algebrice .....	61
<i>Test de autoevaluare</i> .....	65
Recapitulare și sistematizare prin teste .....	67
5. Formule de calcul prescurtat .....	68
<i>Test de autoevaluare</i> .....	73
Recapitulare și sistematizare prin teste .....	75
6. Descompuneri în factori utilizând reguli de calcul în $\mathbb{R}$ .....	76
6.1. Metoda factorului comun .....	76
6.2. Utilizarea formulelor de calcul prescurtat .....	79
6.3. Gruparea termenilor.....	83
6.4. Metode combinate .....	85
6.5. Maxime și minime. Inegalități algebrice .....	90
<i>Test de autoevaluare</i> .....	93
Recapitulare și sistematizare prin teste .....	95
<b>B. Rapoarte de numere reale reprezentate prin litere .....</b>	<b>96</b>
7. Amplificarea. Simplificarea .....	96
<i>Test de autoevaluare</i> .....	103

## GEOMETRIE

### Capitolul I. ELEMENTE ALE GEOMETRIEI ÎN SPAȚIU

1. Puncte, drepte, plane. Determinarea drepteii .....	105
2. Determinarea planului .....	108
3. Corpuri geometrice .....	110
3.1. Piramida, piramida regulată, tetraedrul regulat .....	110
3.2. Prisma dreaptă. Paralelipipedul dreptunghic. Cubul .....	112
3.3. Cilindrul circular drept. Conul circular drept .....	116
<i>Test de autoevaluare</i> .....	119
4. Pozițiile relative a două drepte în spațiu; relația de paralelism în spațiu .....	121
5. Unghiuri cu laturile respectiv paralele; unghiul a două drepte în spațiu; drepte perpendiculare .....	123
6. Pozițiile relative ale unei drepte față de un plan .....	125
<i>Test de autoevaluare</i> .....	129
Recapitulare și sistematizare prin teste .....	131
7. Pozițiile relative a două plane. Plane paralele .....	132
8. Secțiuni paralele cu baza în corpurile geometrice studiate. Trunchiul de piramidă. Trunchiul de con circular drept .....	136
9. Probleme de matematică aplicată în viața cotidiană .....	139
10. Perpendicularitate .....	140
10.1. Dreaptă perpendiculară pe un plan. Distanța de la un punct la un plan .....	140
<i>Test de autoevaluare</i> .....	143
10.2. Înălțimea unei piramide. Înălțimea unui con circular drept .....	145
10.3. Distanța dintre două plane paralele. Înălțimea prisme. Înălțimea cilindrului circular drept. Înălțimea trunchiului de piramidă. Înălțimea trunchiului de con .....	146
<i>Test de autoevaluare</i> .....	149
Recapitulare și sistematizare prin teste .....	151
10.4. Plane perpendiculare .....	152
11. Proiecții de puncte, de segmente și de drepte pe un plan .....	154
12. Unghiul dintre o dreaptă și un plan. Lungimea proiecției unui segment .....	156
<i>Test de autoevaluare</i> .....	159
13. Unghi diedru. Unghi plan corespunzător diedrului. Unghiul dintre două plane .....	161
<i>Test de autoevaluare</i> .....	165
Recapitulare și sistematizare prin teste .....	167
14. Teorema celor trei perpendiculare. Calculul distanței de la un punct la o dreaptă. Calculul distanței de la un punct la un plan. Calculul distanței dintre două plane paralele .....	168
<i>Test de autoevaluare</i> .....	173
Recapitulare și sistematizare prin teste .....	175
15. Probleme de matematică aplicată în viața cotidiană .....	176
<b>TESTE RECAPITULATIVE</b> .....	178
<b>PROBLEME PENTRU PREGĂTIREA OLIMPIADEI ȘI A CONCURSURILOR ȘCOLARE</b> .....	183
<b>INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI</b> .....	187

# Recapitulare și evaluare inițială

## PE Teste cu exerciții și probleme recapitulative pentru pregătirea testării inițiale

### ✿ TESTUL 1 ✿

1. Efectuați calculele:

a)  $\sqrt{6} \cdot \left( \frac{5}{\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{3}} \right) + \sqrt{8} - \sqrt{27}$ ;

b)  $2\sqrt{3} \cdot (\sqrt{108} - \sqrt{75} - \sqrt{27})$ ;

c)  $\left( \frac{4}{\sqrt{50}} + \frac{3}{\sqrt{8}} \right) - \left( \frac{5}{2\sqrt{2}} - \frac{3\sqrt{2}}{2} \right)$ .

2. Rezolvați ecuațiile:

a)  $3(x+3) - 5(x+1) = 4(x+4)$ ;

b)  $|2x-3| = 5$ ;

c)  $\frac{4x-3}{3} - \frac{2x+1}{2} = 1\frac{1}{6}$ ;

d)  $\sqrt{(x-2)^2} = \frac{1}{4}$ ;

e)  $(x+3)^2 = 25$ .

3. Se consideră numerele  $a = 2\sqrt{432} - 3\sqrt{75} - \sqrt{147}$  și  $b = 3\sqrt{243} - 3\sqrt{108} - \sqrt{27}$ . Calculați media geometrică a numerelor  $a$  și  $b$ .

4. Rezolvați sistemele:

a)  $\begin{cases} 2x-3y=17 \\ 3x+2y=6 \end{cases}$ ;

b)  $\begin{cases} 3(2x+y) - 2(x+2y-5) = 20 \\ 5(x-y+2) = 4(2x-y+3) - 13 \end{cases}$

5. Se consideră punctele  $A(-2; -3)$ ,  $B(1; 3)$  și  $C(3; 7)$ .

a) Reprezentați punctele într-un sistem de axe de coordonate.

b) Arătați că punctele  $A$ ,  $B$  și  $C$  sunt coliniare.

c) Determinați coordonatele punctului  $M$ , mijlocul segmentului  $BC$ .

6. O persoană constată că după ce a cheltuit 25% din suma pe care a avut-o și încă 20% din restul rămas, mai are în portofel 252 lei. Ce sumă a avut inițial?

7. Se consideră triunghiul dreptunghic  $ABC$ , cu  $\sphericalangle A = 90^\circ$  și  $\sphericalangle C = 30^\circ$ . Știind că mediana  $AM = 10$  cm,  $M \in BC$ , calculați:

a) perimetrul triunghiului  $ABC$ ;

b) valoarea raportului  $\frac{\mathcal{A}_{ABD}}{\mathcal{A}_{ABC}}$ , unde  $D$  este piciorul înălțimii duse din  $A$  pe ipotenuza

$BC$ .

8. În cercul de centru  $O$  și rază  $R = 8$  cm se construiește diametrul  $AB$  și o coardă  $CD$ , astfel încât  $AB \cap CD = \{E\}$ . Știind că  $\sphericalangle BDC = 60^\circ$ , calculați aria triunghiului  $AOC$ .

# Algebră

## Capitolul I Intervale de numere reale. Inecuații în $\mathbb{R}$

### PP Competențe specifice

- C<sub>1</sub>. Recunoașterea apartenenței unui număr real la o mulțime
- C<sub>2</sub>. Efectuarea unor operații cu intervale numerice reprezentate pe axa numerelor sau cu mulțimi definite printr-o proprietate a elementelor ei
- C<sub>3</sub>. Utilizarea unor procedee matematice pentru operații cu intervale și rezolvarea inecuațiilor în  $\mathbb{R}$
- C<sub>4</sub>. Folosirea terminologiei aferente noțiunilor de mulțime, de interval numeric și de inecuații
- C<sub>5</sub>. Interpretarea unei situații date utilizând intervale și inecuații
- C<sub>6</sub>. Rezolvarea unor situații date, utilizând intervale numerice sau inecuații

### PE-PP 1. Mulțimi de numere. Forme de scriere a unui număr



**Mulțimea numerelor naturale**, notată cu  $\mathbb{N}$ , este  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$ .

#### Observații:

a) Mulțimea notată cu  $\mathbb{N}^*$  este  $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$  și  $\mathbb{N}^* \subset \mathbb{N}$ .

b) Avem, pentru orice  $x, y \in \mathbb{N}$ :

i)  $x + y \in \mathbb{N}$ ,  $x \cdot y \in \mathbb{N}$  și **consecințele**:  $x + y = 0$  înseamnă  $x = y = 0$ , iar  $x \cdot y = 1$  înseamnă  $x = y = 1$ .

ii)  $x - y \in \mathbb{N}$  numai dacă  $x \geq y$ , iar  $x : y \in \mathbb{N}$  numai dacă **există**  $z \in \mathbb{N}$  astfel încât  $y \cdot z = x$ . Dacă acest lucru nu are loc, se folosește teorema **împărțirii cu rest**:  $x = yz + t$ , cu  $t \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq t < y$ ,  $y \neq 0$ .

iii)  $x^y \in \mathbb{N}$ , cu excepția cazului  $0^0$ .

**Mulțimea numerelor întregi**, notată cu  $\mathbb{Z}$ , este:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -n, \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots, n, \dots\}.$$

### Observații:

a)  $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ; în plus, se definesc:  $\mathbb{Z}_- = \{\dots, -n, \dots, -3, -2, -1\}$  și  $\mathbb{Z}_+ = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$ , cu  $n \in \mathbb{N}^*$ . Avem  $\mathbb{Z}^* \subset \mathbb{Z}, \mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ .

$$\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_- \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}_+$$

b) Pentru  $x, y, z, t \in \mathbb{Z}$ , avem:

- $x + y \in \mathbb{Z}, x - y \in \mathbb{Z}, x \cdot y \in \mathbb{Z}$ .
- Dacă  $x^2 + y^2 = 0$ , atunci  $x = y = 0$ .
- $x : y \in \mathbb{Z}, y \neq 0$  dacă și numai dacă există  $z \in \mathbb{Z}$ , cu  $x = yz$ . În caz contrar,  $x = yz + t$ , unde  $t \in \mathbb{Z}$  și  $0 \leq |t| < |y|$ .

**Mulțimea numerelor raționale**, notată cu  $\mathbb{Q}$ , este:

$$\mathbb{Q} = \left\{ x \mid \text{există } y, z \in \mathbb{Z}, z \neq 0, \text{ astfel încât } x = \frac{y}{z} \right\}.$$

### Observații:

a) Avem  $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ , iar mulțimea  $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$  se numește mulțimea numerelor raționale **neîntregi**. De asemenea,  $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ .

b) Un **număr rațional** este reprezentat de o fracție de forma  $\frac{x}{y}$ , cu  $x \in \mathbb{Z}$  și  $y \in \mathbb{Z}^*$ .

Vom spune că două fracții  $\frac{x}{y}$  și  $\frac{z}{t}$ , cu  $x, z \in \mathbb{Z}$  și  $y, t \in \mathbb{Z}^*$ , se numesc **fracții echivalente** dacă  $xt = yz$ . Dată o fracție  $\frac{x}{y}$ , se obțin fracții echivalente cu ea prin:

i) **amplificare**:  $\frac{x}{y} = \frac{x \cdot t}{y \cdot t}$ , cu  $x \in \mathbb{Z}$  și  $y, t \in \mathbb{Z}^*$ ;

ii) **simplificare**:  $\frac{x}{y} = \frac{x : t}{y : t}$ , cu  $x \in \mathbb{Z}, y, t \in \mathbb{Z}^*$  și  $t \mid x, t \mid y$ .

c) O fracție  $\frac{x}{y}$ ,  $x, y \in \mathbb{Z}, y \neq 0$  este **ireductibilă** dacă  $(x, y) = 1$ .

Un **număr rațional** care este **reprezentat** de o fracție  $\frac{x}{y}$ ,  $x, y \in \mathbb{Z}, y \neq 0$ , se scrie sub formă **zecimală** împărțind numărătorul  $x$  la numitorul  $y$ .

În funcție de factorii în care se descompune numitorul fracției ireductibile  $\frac{x}{y}$ , fracția zecimală poate fi:

- fracție zecimală finită**, dacă în descompunerea numitorului apar **factori** de 2 sau de 5;
- fracție zecimală periodică simplă**, dacă descompunerea numitorului în produs de **factori** primi conține **alți** factori decât 2 și 5;
- fracție zecimală periodică mixtă**, dacă descompunerea numitorului în produs de factori primi conține atât factori de 2 sau/și numai factori de 5, cât și un alt factor prim.

**Reciproc:** Dacă un număr rațional este reprezentat printr-o **fracție zecimală**, el poate fi scris sub formă de **fracție ordinară** folosind **reguli de transformare** pentru fiecare tip de fracție zecimală:

i) **fracție zecimală finită:**  $\overline{a, b_1 b_2 b_3 \dots b_n} = \frac{ab_1 b_2 b_3 \dots b_n}{10^n}$ ;

ii) **fracție zecimală periodică simplă:**  $\overline{a, (b_1 b_2 b_3 \dots b_n)} = a \frac{\overline{b_1 b_2 b_3 \dots b_n}}{\underbrace{99 \dots 9}_{\text{de } n \text{ ori}}}$ ;

iii) **fracție zecimală periodică mixtă:**  
 $\overline{a, b_1 b_2 \dots b_n (c_1 c_2 \dots c_m)} = \frac{\overline{ab_1 b_2 \dots b_n c_1 c_2 \dots c_m} - \overline{ab_1 b_2 \dots b_n}}{\underbrace{999 \dots 9}_{\text{de } m \text{ ori}} \underbrace{000 \dots 0}_{\text{de } n \text{ ori}}}$ .

d) Pentru orice  $x, y \in \mathbb{Q}$ , avem  $x + y \in \mathbb{Q}$ ,  $x - y \in \mathbb{Q}$ ,  $x \cdot y \in \mathbb{Q}$ ,  $x : y \in \mathbb{Q}$ ,  $y \neq 0$ ,  $x^y \in \mathbb{Q}$ ,  $x \neq 0$ .

**Mulțimea numerelor iraționale**, notată cu  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ , este mulțimea numerelor care se scriu zecimal cu o **infinite** de zecimale care **nu se repetă** periodic.

**Mulțimea numerelor reale**, notată cu  $\mathbb{R}$ , este mulțimea formată din **reuniunea** mulțimii numerelor raționale cu mulțimea numerelor iraționale. În mod asemănător,  $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

Avem **șirul incluziunilor**:  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ .

## ● ● ● activități de învățare ● ● ●

### PE Înțelegere \*

**1.** Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

- a)  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ ;      b)  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$ ;      c)  $\mathbb{N} \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ;      d)  $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{N}$ ;      e)  $\mathbb{N} \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ ;  
 f)  $\mathbb{Z} \not\subset \mathbb{N}$ ;      g)  $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z} \setminus \mathbb{Q}$ ;      h)  $\mathbb{Q} \not\subset \mathbb{Z}$ ;      i)  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ;      j)  $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$ ;  
 k)  $\mathbb{R} \not\subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ;      l)  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ ;      m)  $\emptyset \subseteq \mathbb{Q}$ ;      n)  $\emptyset \not\subset \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}^*$ ;      o)  $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{N}^*$ .

**2.** Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

- a)  $8 \in \mathbb{N}$ ;      b)  $8 \in \mathbb{Z}$ ;      c)  $8 \in \mathbb{Q}$ ;      d)  $8 \in \mathbb{R}$ ;      e)  $-6 \in \mathbb{Z}$ ;  
 f)  $-6 \in \mathbb{N}$ ;      g)  $-\frac{7}{3} \in \mathbb{Q}$ ;      h)  $-8,3 \in \mathbb{R}$ ;      i)  $-\frac{9}{3} \in \mathbb{Z}$ ;      j)  $4,(5) \in \mathbb{Q}$ ;  
 k)  $\sqrt{8} \in \mathbb{R}$ ;      l)  $\sqrt{8} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ;      m)  $\sqrt{25 - (-3) \cdot (-8)} \in \mathbb{N}$ ;      n)  $[ -(-3) + (-2) ]^2 \in \mathbb{Z}$ .

**3.** Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

- a)  $\sqrt{2\frac{1}{4}} \in \mathbb{Q}$ ;      b)  $\sqrt{0,(2)} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ;      c)  $\sqrt{2^2 \cdot 3^3} \in \mathbb{Z}$ ;  
 d)  $0,(3) + \sqrt{0,(4)} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ;      e)  $\sqrt{1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3} \in \mathbb{N}$ ;      f)  $\sqrt{2^3 \cdot 3^2 + 3\sqrt{144}} \in \mathbb{Z}$ ;  
 g)  $\{0\} \in \mathbb{R}$ ;      h)  $0 \notin \mathbb{R}^*$ ;      i)  $\{0\} \subset \mathbb{R}$ ;      j)  $2 \in \mathbb{Q} \setminus \{-2, 2\}$ .

**PE Aplicare și exersare \*\***

**14.** Fie mulțimea  $A = \left\{ \sqrt{12}; -\sqrt{\frac{2}{3}}; \sqrt{3\frac{1}{5}}; (-\sqrt{2})^{-1}; -\sqrt{7}; \sqrt{0,(3)} \right\}$ .

Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

a)  $A \subset \mathbb{R}$ ;      b)  $A \subset (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ ;      c)  $A \subset \mathbb{Q}$ .

**15.** Fie mulțimea  $A = \left\{ (\sqrt{3})^{-1}; (-\sqrt{2})^3; \sqrt{2\frac{2}{3}}; -\sqrt{150}; \sqrt{192}; \sqrt{5^3}; -\sqrt{2^5} \right\}$ .

Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

a)  $A \subset \mathbb{Q}$ ;      b)  $A \subset (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ ;      c)  $A \not\subset \mathbb{R}$ .

**16.** Fie mulțimea  $A = \left\{ (-2)^2; (-3)^{-2}; \sqrt{0,09}; \sqrt{5\frac{5}{9}}; (-1)^4; \sqrt{18}; \sqrt{1\frac{2}{25}}; \left(-\frac{1}{2}\right)^{-1}; \sqrt{5\frac{3}{9}} \right\}$ .

Determinați mulțimile:  $A \cap \mathbb{N}$ ,  $A \cap \mathbb{Z}$ ,  $A \cap \mathbb{Q}$ ,  $A \cap \mathbb{R}$ ,  $A \cap (\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z})$ ,  $A \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ .

**17.** Determinați elementele mulțimilor:

$A = \{x \in \mathbb{N}^* \mid x + 3 \mid 36\}$ ;       $B = \{x \in \mathbb{N}^* \mid 2x + 1 \mid 45\}$ ;

$C = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 27 \text{ și } 8 \mid x + 5\}$ ;       $D = \left\{ x \in \mathbb{N} \mid \frac{15}{2x+1} \in \mathbb{N} \right\}$ ;

$E = \left\{ x \in \mathbb{Z} \mid \frac{21}{2x+1} \in \mathbb{Z} \right\}$ ;       $F = \left\{ x \in \mathbb{N} \mid \frac{2x+5}{x+1} \in \mathbb{N} \right\}$ ;

$G = \left\{ x \in \mathbb{Z} \setminus \{-2\} \mid \frac{3x+11}{x+2} \in \mathbb{Z} \right\}$ ;       $H = \left\{ x \in \mathbb{Z} \mid \frac{3x+9}{2x-3} \in \mathbb{Z} \right\}$ .

✎ În rezolvarea exercițiilor următoare folosiți, dacă este cazul, formula:

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+C}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-C}{2}}, \text{ unde } C^2 = A^2 - B.$$

**18.** Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

a)  $\sqrt{5} - \sqrt{3} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ;      b)  $\sqrt{45} = \sqrt{20} + \sqrt{5}$ ;

c)  $\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{5 + 2\sqrt{6}}$ ;      d)  $\sqrt{3 + \sqrt{5}} - \sqrt{3 - \sqrt{5}} = \sqrt{2}$ ;

e)  $\sqrt{2 + \sqrt{3}} + \sqrt{2 - \sqrt{3}} - \sqrt{6} \in \mathbb{Q}$ ;      f)  $\sqrt{7 + \sqrt{24}} - \sqrt{7 - 2\sqrt{6}} = (\sqrt{2})^2$ .

**19.** Demonstrați că următoarele numere nu sunt raționale:

a)  $\sqrt{5n+3}$ ;      b)  $\sqrt{5n+8}$ ;      c)  $\sqrt{7n+3}$ ;

d)  $\sqrt{n^2 + n}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ;      e)  $\sqrt{4n^2 + n}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ;      f)  $\sqrt{2007^{2010} - 2006^{2010}}$ ;

g)  $\sqrt{1+3+3^2+\dots+3^{2010}}$ ;      h)  $\sqrt{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2011+3}$ ;      i)  $\sqrt{456^{564} + 321^{312} + 215^{804}}$ .

**20.** Arătați că  $\sqrt{2-\sqrt{3}} + \sqrt{5-\sqrt{13+\sqrt{48}}} \in \mathbb{Q}$  și  $\sqrt{26-6\sqrt{13+4\sqrt{8-2\sqrt{6+2\sqrt{5}}}}} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ .

**PE Aprofundare și performanță \*\*\*****21.** Determinați valoarea de adevăr a propozițiilor:

- a)  $\sqrt{x} \in \mathbb{R}$ ;      b)  $\sqrt{x} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ;      c)  $\sqrt{x} \in \mathbb{Z}$ ;      d)  $\sqrt{x} \in \mathbb{Q}$ ,

unde  $x = \sqrt{441 + 2 + 4 + 6 + \dots + 880}$ .**22.** Determinați valoarea de adevăr a propozițiilor:

- a)  $\sqrt{x} \in \mathbb{R}$ ;      b)  $\sqrt{x} \in \mathbb{Z}$ ;      c)  $\sqrt{x} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ;      d)  $\sqrt{x} \in \mathbb{N}$ ,

unde  $x = \sqrt{243^2 - (240^2 + 3 \cdot 240)}$ .**23.** Determinați valoarea de adevăr a propozițiilor:

- a)  $x \in \mathbb{R}$ ;      b)  $x \in \mathbb{Q}$ ;      c)  $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ;      d)  $x \in \mathbb{Z}$ ,

unde  $x = \sqrt{2010 + 2(1 + 2 + 3 + \dots + 2009)}$ .**24.** Determinați mulțimile:

$$a) A = \left\{ x \in \mathbb{Z} \setminus \{2\} \mid \frac{\sqrt{28 - 10\sqrt{3}} + \sqrt{5 - 2\sqrt{6}} + \sqrt{18 + 8\sqrt{2}}}{x - 2} \in \mathbb{Z} \right\};$$

$$b) B = \left\{ x \in \mathbb{Z} \mid \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{21}} + \sqrt{39 + 12\sqrt{3}} + \sqrt{16 - 6\sqrt{7}}}{2x + 1} \in \mathbb{Z} \right\};$$

$$c) C = \left\{ x \in \mathbb{Z} \mid \frac{\sqrt{15 - 6\sqrt{6}} + \sqrt{11 - 2\sqrt{30}} + \sqrt{41 + 12\sqrt{5}}}{2x - 1} \in \mathbb{Z} \right\}.$$

**25.** Determinați numerele naturale  $\overline{ab}$ , știind că acestea îndeplinesc condițiile:  $\overline{ab} : 5$  și  $\sqrt{\overline{ab} + \overline{ba}} \in \mathbb{Q}$ .**26. a)** Arătați că  $a = \sqrt{9^n \cdot 2^{2n+1} - 4^n \cdot 3^{2n}} \in \mathbb{Q}$ , pentru oricare  $n \in \mathbb{N}^*$ .b) Determinați  $n \in \mathbb{N}$ , astfel încât  $a = 216$ .**27.** Determinați cifra  $x$ , în baza 10, astfel încât:

- a)  $\sqrt{\frac{14x}{27}} \in \mathbb{Q}$ ;      b)  $\sqrt{\frac{12x}{18}} \in \mathbb{Q}$ ;      c)  $\sqrt{\frac{72x}{5}} \in \mathbb{Z}$ ;      d)  $\sqrt{\frac{18x}{4}} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ .

**PE-PP Supermate \*\*\*\*****28.** Determinați numerele raționale  $a$  și  $b$  care îndeplinesc condiția:

$$a) \frac{a}{\sqrt{2}-1} + \frac{b}{\sqrt{2}+1} = 7 - 3\sqrt{2}; \quad b) a(2 + \sqrt{5}) + \frac{b}{3 - \sqrt{5}} = \sqrt{5} + 4;$$

$$c) a\sqrt{3} + \frac{a}{2} + \frac{b}{\sqrt{3}-1} = 2\sqrt{3} + 5.$$

**29.** Fie numărul rațional  $r \in \mathbb{Q}$ . Dacă  $11r \in \mathbb{Z}$  și  $13r \in \mathbb{Z}$ , demonstrați că  $r \in \mathbb{Z}$ .





# Capitolul II

## Calcul algebric în $\mathbb{R}$

### PP Competențe specifice

- C<sub>1</sub>. Identificarea componentelor unei expresii algebrice
- C<sub>2</sub>. Aplicarea unor reguli de calcul cu numere reale exprimate prin litere
- C<sub>3</sub>. Utilizarea formulelor de calcul prescurtat și a unor algoritmi pentru rezolvarea ecuațiilor și a inecuațiilor
- C<sub>4</sub>. Exprimarea matematică a unor situații concrete prin calcul algebric
- C<sub>5</sub>. Interpretarea unei situații date utilizând calcul algebric
- C<sub>6</sub>. Interpretarea matematică a unor probleme practice prin utilizarea ecuațiilor sau a formulelor de calcul prescurtat

### A. Operații cu numere reale reprezentate prin litere



**Definiție.** Se numește **expresie algebrică** o succesiune de numere și/sau litere legate între ele prin operații aritmetice (adunare, scădere, înmulțire, împărțire, ridicare la putere).

**Exemple:**  $7, x, 7x, 7\sqrt{3}x, 7\sqrt{3}x - 8y^2$ .

#### Observații:

a) **Cea mai simplă** expresie algebrică obținută doar prin înmulțire cu numere și/sau litere se numește **termen** al expresiei algebrice.

**Exemple:**  $7, x, xy, 8z^2y^3$ .

b) **Numărul** care apare în scrierea unui termen al unei expresii algebrice se numește **coeficientul termenului**.

**Exemple:**  $-7xy^2$  are coeficientul  $-7$ ,  $18\sqrt{3}x^2z$  are coeficientul  $18\sqrt{3}$ ,  $-0,(7)z^2$  are coeficientul  $-0,(7)$ .

c) **Literele** care intră în scrierea unui termen alcătuiesc **partea literală** a sa.

**Exemple:**  $-81x$  are partea literală  $x$ ,  $-8x^2y^3z$  are partea literală  $x^2y^3z$ .

d) Cu expresiile algebrice se pot efectua aceleași **operații** care se efectuează cu numerele reale: adunarea, scăderea, înmulțirea, împărțirea, ridicarea la putere. Aceste operații au **aceleași proprietăți** pe care le au operațiile cu numere reale.

## 1. Adunarea și scăderea numerelor reale reprezentate prin litere

**Definiție.** Se numesc **termeni asemenea** acei termeni care conțin aceeași succesiune de litere la aceeași exponenți.

**Exemple:** a)  $-3x + 9 + 6x$ , termenii asemenea sunt  $-3x$  și  $6x$ ;

b)  $7\sqrt{5} + 11a - 7x^3z + 2\sqrt{5} + \frac{3}{5}x^3z$ , termenii asemenea sunt  $7\sqrt{5}$  și  $2\sqrt{5}$ , respectiv  $-7x^3z$  și  $\frac{3}{5}x^3z$ .

### Observații:

a) **Adunarea sau scăderea** a doi termeni asemenea este operația prin care se obține un termen asemenea cu cei inițiali, iar coeficientul noului termen se obține efectuând operațiile algebrice indicate asupra celor doi coeficienți ai termenilor inițiali.

b) **Operațiile** de adunare și scădere efectuate cu **termeni asemenea** se numesc operații de **reducere** a termenilor asemenea.

**Exemple:** i)  $7x + 5x = 12x$ ; ii)  $-7xy + 2xy = -5xy$ ; iii)  $-3x^2 - 8x^2 = -11x^2$ .

c) O **expresie algebrică** este considerată a fi scrisă în **forma canonică** dacă nu conține termeni asemenea.

d) **Produsul** dintre un număr real și o expresie algebrică se efectuează înmulțind acest număr cu fiecare coeficient al termenilor ce compun expresia algebrică, cu respectarea regulilor de calcul cu numere reale.

**Exemplu:**  $3(2x^2 - 5x + 5) - (4x^2 + 3x + 3y) - 4(x + y) = \underline{6x^2} - \underline{15x} + 15 - \underline{4x^2} - \underline{3x} - \underline{3y} - \underline{4x} - \underline{4y} = 2x^2 - 22x - 7y + 15$ .

## ● ● ● activități de învățare ● ● ●

### PE Înțelegere \*

1. Efectuați:

a)  $4x - 3x + 5x$ ;

b)  $7x^2 - 3x^2 + 3x^2$ ;

c)  $2ab - 5ab$ ;

d)  $9x^2 - 11x^2 - 9x^2$ ;

e)  $-4,2y - 1,8y$ ;

f)  $0,3a - 0,7a$ ;

g)  $\frac{2}{7}a^2 - \frac{3}{7}a^2 - \frac{a^2}{7}$ ;

h)  $\sqrt{3}x - 2\sqrt{3}x$ ;

i)  $2\sqrt{5}xy - 7\sqrt{5}xy$ ;

j)  $8abc - 11abc$ ;

k)  $y^2 + 13y^2 - 5y^2$ ;

l)  $4x^2y^2 - 7x^2y^2 + 3x^2y^2$ .

2. Reduceți termenii asemenea:

a)  $7x + 2y - 4z - 5x + 6y + 3z$ ;

b)  $3a - 9b + 2a + 7b - 4a - 5b$ ;

c)  $8x - 3y - 5z - 9x - 4y + 3z$ ;

d)  $13x^2 - 2x + 4x^2 - 11x - 15x^2 + 13x$ ;

e)  $17xy - 21x^2y - 12xy + 23x^2y - 2x^2y$ ;

f)  $7x - 9 - 11x + 12 + 4x$ .

3. Scrieți în spațiul punctat termenul corespunzător obținerii unei propoziții adevărate:

a)  $18x - 16x + \dots + 5x = 24x$ ;

b)  $16x - 23x + \dots + 6x = 18x$ ;

c)  $10a + 14a - \dots + 12a = 15a$ ;

d)  $4x^2 - 5x^2 + \dots + 18x^2 = 0$ ;

e)  $11xy - 7xy + \dots - 8xy = 21xy$ .

4. Scrieți în spațiul punctat termenii corespunzători obținerii unei propoziții adevărate:
- a)  $3x^2 - 9a + 7x^2 + \dots = 12a + 5x^2$ ;      b)  $7xy + 9x^2 - 3x + \dots + xy - 4x^2 = 2x^2 + 5xy$ ;  
 c)  $4x + 18x - 13 + \dots = -6x$ ;      d)  $4x - 7xy^2 - 9x + 5xy^2 + \dots = 0$ .
5. Desfaceți parantezele și reduceți termenii asemenea:
- a)  $(2x^2 - 7x) + (6x - 3x^2)$ ;      b)  $(2a - 5b) + (-6a + 3b)$ ;  
 c)  $(x^2 + x + 3) - (2x^2 + x - 5)$ ;      d)  $(6x^2 - 3x + 4) - (4x^2 - 3x + 5)$ ;  
 e)  $(4x - 3a) + (5x + 6a) - (8x - 5a)$ ;      f)  $(4a + 3b - 5) - (2a + 3b) + (a + 5)$ .

**PE** **Aplicare și exersare \*\***

6. Desfaceți parantezele și reduceți termenii asemenea:
- a)  $-13x - 15y + 9x - (19x + 3y - 12x) + 7y$ ;  
 b)  $(5x - 8y) - (11x + 3y) - (-13x - 5y)$ ;  
 c)  $(4x^2 - 3y + 2x) - (4x + 6y - 5x^2) - (9x^2 - 7y - 3x)$ ;  
 d)  $(3a + 4b - 2c) + (-5a - 6b + 4c) - (4a - 7b - 5c)$ ;  
 e)  $(5x - 3a + 2b) - (4x - 5a + 6b) - (7a - 6x - 5b)$ .
7. Desfaceți parantezele și reduceți termenii asemenea:
- a)  $2(3a - 4b) - 3(a - 2b) + 4(-2a + 3b)$ ;  
 b)  $4(3x + 2y) - 5(2x - 3y) + 3(-4x - 5y)$ ;  
 c)  $-3(x^2 - 2) + 6(x^2 - 1) - 4(x^2 + 3) + 2(x^2 - 4)$ ;  
 d)  $3(5x - 2y) - 5(2x + y) + 2(-3x - 4y) - 4(-x - 3y)$ ;  
 e)  $3(4a + 5b) - 5(2a + 3b) - 4(3a + 4b) + 2(-a - 2b)$ .
8. Efectuați calculele și reduceți termenii asemenea:
- a)  $2(3a + 9b - 7c) - 3(4a + 5b + 9c) - 5(a + 2b - 8c)$ ;  
 b)  $4(2x^2 - 3x + 4) - 3(3x^2 - 4x - 2) + 2(x^2 - 2x - 10)$ ;  
 c)  $5(3x^2 - 5x + 6) - 4(5x^2 - 6x + 7) - 3(-x^2 + 2x - 2)$ ;  
 d)  $6(-x^2 - 3x + 5) - 7(2x^2 - 4x + 6) + 5(5x^2 + 2x - 1)$ .
9. Efectuați calculele și reduceți termenii asemenea:
- a)  $2(3x^2 - 2x - 5) - 3(4x^2 - 2x - 7) - 4(2x^2 + x + 3)$ ;  
 b)  $3(2x^2 - x + 4) - 4(3x^2 - 2x + 5) - 2(x^2 + 7x - 3)$ ;  
 c)  $2(6x^2 - 5x + 4) - 3(4x^2 - 3x + 5) - 4(2x^2 + 3x - 4)$ .
10. Desfaceți parantezele și reduceți termenii asemenea:
- a)  $3(4x - 3y + 2z) - 2(3x - 2y - 3z) - 4(x + 3y + 2z)$ ;  
 b)  $2(3x - 2y - 5z) - 3(4x - 2y - 7z) - 4(2x + 3y + 3z)$ ;  
 c)  $4(5x - 6y + 3z) - 3(6x - 5y + 4z) - 2(3x + 4y - 5z)$ .
11. Efectuați:
- a)  $8\sqrt{3a} + 12\sqrt{3a} + 3\sqrt{3a} - 15\sqrt{3a} - 25\sqrt{3a}$ ;  
 b)  $9\sqrt{2x} + 13\sqrt{2x} - 18\sqrt{2x} + 5\sqrt{2x} - 10\sqrt{2x}$ ;  
 c)  $4\sqrt{5xy} - 7\sqrt{5xy} + 14\sqrt{5xy} - 9\sqrt{5xy} + 2\sqrt{5xy}$ ;  
 d)  $5\sqrt{6x^2y} - 14\sqrt{6x^2y} + 19\sqrt{6x^2y} - 23\sqrt{6x^2y} + 8\sqrt{6x^2y}$ .
12. Reduceți termenii asemenea:
- a)  $5\sqrt{3x^2} + 4\sqrt{2x^2} - 3\sqrt{3x^2} - 6\sqrt{2x^2}$ ;      b)  $\sqrt{3a} + \sqrt{27a} - 5\sqrt{2b} + \sqrt{8b} + \sqrt{72b}$ ;  
 c)  $\sqrt{12x^2} - \sqrt{32a^2} - 4\sqrt{3x^2} + \sqrt{50a^2}$ ;      d)  $(\sqrt{2} + 1)x - \sqrt{8x} - 3x - (\sqrt{2} + 4)x$ .



✿ **TESTUL 1** ✿

1. Calculați:
 

a) $6x + 11y - 10x - 8y + 9x - 7y$ ;	b) $(-16x^3)^5 : (+8x^2)^6$ ;
c) $(3x - 5)(2x + 3)$ ;	d) $4x + 5y - (6x - 7y) - (5x + 6y)$ ;
e) $3(x^2 - 2xy - y^2) + 2(x^2 + 3xy + 2y^2) - (5x^2 + y^2)$ .	
2. Calculați, respectând ordinea efectuării operațiilor:
  - a)  $(4x + 3)(2x - 5) - (2x - 3)(3x + 7)$ ;
  - b)  $(x - 2)(x^2 - 3x + 4) - (2 - x^2)(2 - 3x) + (x + 3)(4x - 3)$ ;
  - c)  $(3x + 1)[(36x^4 - 48x^3) : (+12x^3) - 2(x - 1)] - 3x^2$ .
3. Dacă  $3x - 2y = 4$ , calculați valoarea numărului  $n = (6x - 4y) + (6x - 4y)^2 + (6x - 4y)^3$ .
4. Arătați că numărul  $n = 6x^2 - 9x + 7 - x(4x - 6y + 3) + 2(6x - 3xy - 2)$  este pozitiv, oricare ar fi  $x$  real.
5. a) Determinați valoarea maximă a expresiei  $E = 7 - 3x^2$ , unde  $x \in \mathbb{R}$ .  
 b) Determinați valoarea minimă a expresiei  $E = 2x^2 - 9$ , unde  $x \in \mathbb{R}$ .
6. a) Calculați perimetrul unui pătrat a cărui arie este egală cu  $16a^4b^2c^6$ , unde  $a, b, c \in \mathbb{N}^*$ .  
 b) Calculați aria unui pătrat al cărui perimetru este egal cu  $32ab^3c^2$ , unde  $a, b, c \in \mathbb{N}^*$ .

✿ **TESTUL 2** ✿

1. Calculați:
 

a) $10a - 12b - 7a + 9b - 5a + 8b$ ;	b) $(-32x^4)^5 : (-16x^3)^6$ ;
c) $(2x - 7)(3x + 4)$ ;	d) $(-6\sqrt{3} + 5\sqrt{2})x - (7\sqrt{2} - 4\sqrt{3})x$ ;
e) $a\sqrt{(\sqrt{2} - 2)^2} + a\sqrt{(2\sqrt{2} - 3)^2} - 3a\sqrt{(\sqrt{2} - 3)^2}$ .	
2. Calculați, respectând ordinea efectuării operațiilor:
  - a)  $(2x + 5)(4x - 3) - (3x - 7)(2x + 3)$ ;
  - b)  $(x - 3)(x^2 - 2x + 3) - (-x^2)(2 - 3x) + x(3x^2 + 5)$ ;
  - c)  $\{2x^3 + x^3[5x - 2(x + 1)]\} : (-\sqrt{3}x^2)^2$ .
3. Dacă  $2a + 3b = 6$ , calculați valoarea numărului  $n = (4a + 6b)^{-1} + (4a + 6b)^{-2} + (4a + 6b)^{-3}$ .
4. Arătați că numărul  $a = 7x^2 - 8x + 6 - x(5x - 4y + 2) + 2(5x - 2xy + 1)$  este pozitiv, oricare ar fi numărul real  $x$ .
5. a) Determinați valoarea maximă a expresiei  $E = 5 - 2x^2$ , unde  $x \in \mathbb{R}$ .  
 b) Determinați valoarea minimă a expresiei  $E = 3x^2 - 8$ , unde  $x \in \mathbb{R}$ .
6. a) Calculați perimetrul unui pătrat a cărui arie este egală cu  $25a^2b^2c^4$ , unde  $a, b, c \in \mathbb{N}^*$ .  
 b) Calculați aria unui pătrat al cărui perimetru este egal cu  $24ab^2c^3$ , unde  $a, b, c \in \mathbb{N}^*$ .

# Geometrie

## Capitolul I Elemente ale geometriei în spațiu

### PP Competențe specifice

- C<sub>1</sub>. Identificarea unor figuri plane sau a unor elemente caracteristice acestora în configurații spațiale date
- C<sub>2</sub>. Reprezentarea, prin desen sau prin modele, a unor configurații spațiale date
- C<sub>3</sub>. Folosirea unor proprietăți de paralelism sau perpendicularitate pentru analiza pozițiilor relative ale dreptelor și planelor
- C<sub>4</sub>. Descrierea în limbaj matematic a elementelor unei configurații geometrice
- C<sub>5</sub>. Alegerea reprezentărilor geometrice adecvate în vederea descrierii unor configurații spațiale și a calculării unor elemente metrice
- C<sub>6</sub>. Modelarea unor situații practice în limbaj geometric, utilizând configurații spațiale

### PE-PP 1. Puncte, drepte, plane. Determinarea dreptei



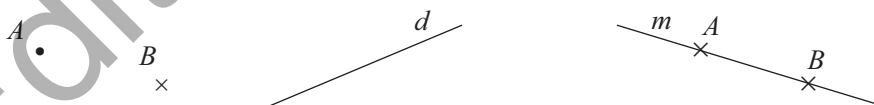
**Punctul, dreapta și planul** fac parte din noțiunile de bază ale geometriei în spațiu. Ele sunt noțiuni primare: nu se definesc, dar pot fi descrise.

**Punctul.** Se reprezintă prin atingerea vârfului unui creion bine ascuțit de foaia de scris:

- , ×. Se notează cu litere mari:  $A, B, C, \dots$

**Dreapta.** Este formată din puncte și se reprezintă printr-un fir de ață foarte subțire întins la nesfârșit în ambele sensuri. Se notează cu litere mici:  $a, b, d, \dots$

Dacă punctele  $A$  și  $B$  sunt pe o dreaptă, atunci se poate nota dreapta cu  $AB$ .



**Planul.** Poate fi asemănat cu suprafața liniștită a unei ape. De asemenea, planul este nesfârșit în toate direcțiile. Se notează cu litere din alfabetul grec:  $\alpha, \beta, \gamma, \pi, \dots$ . Un plan care conține trei puncte necoliniare  $A, B$  și  $C$  se notează prin  $(ABC)$ . Planul se reprezintă printr-un paralelogram.

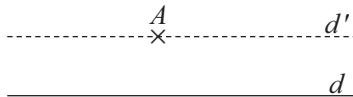


**Propoziții despre puncte, drepte și plane**

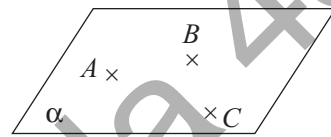
**P<sub>1</sub>.** (Axioma dreptei) Prin două puncte distincte trece o dreaptă și numai una. Orice dreaptă are cel puțin două puncte distincte.



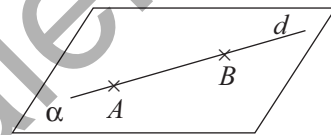
**P<sub>2</sub>.** (Axioma paralelelor sau postulatul lui Euclid) Într-un plan, printr-un punct exterior unei drepte se poate duce o paralelă și numai una la acea dreaptă.



**P<sub>3</sub>.** Fiind date trei puncte necoliniare, există un plan și numai unul care să le conțină. Orice plan conține cel puțin trei puncte necoliniare.

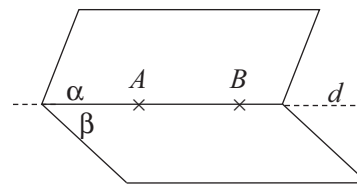


**P<sub>4</sub>.** Dacă două puncte distincte aparțin unui plan, atunci dreapta determinată de ele are toate punctele în acel plan.

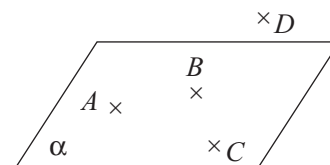


**P<sub>5</sub>.** Dacă două plane distincte au un punct comun, atunci ele mai au cel puțin încă un punct comun.

**Consecință:** Dacă două plane distincte au un punct comun, atunci ele au o dreaptă comună.



**P<sub>6</sub>.** Există patru puncte nesituate în același plan (acestea se numesc **necoplanare**).



● ● ● **activități de învățare** ● ● ●

**PE** **Înțelegere** \*

- Completați spațiile punctate cu răspunsul corect:
  - Trei puncte necoliniare determină un .....
  - Prin două puncte distincte trece o ..... și numai una.
  - Dacă două plane distincte au un punct comun, atunci ele au o ..... comună.
  - Patru puncte necoplanare determină un număr de ..... drepte.
- Stabiliți valoarea de adevăr a fiecăreia dintre următoarele propoziții:
  - Oricare trei puncte sunt coplanare.